

INFLUENCE DE GRADIENTS DE PROPRIETES PHYSIQUES EN CONVECTION FORCEE—APPLICATION AU CAS DU TUBE

JACQUES CHARRAUDEAU

Laboratoire de Dynamique des Fluides, Faculté des Sciences,
40, avenue du Recteur Pineau, 86-Poitiers, France

(Reçu le 5 Novembre 1973)

Résumé—On a résolu, le système des équations des couches limites dynamiques et thermiques dans le cas d'un écoulement incompressible à répartition de vitesse initiales linéaire et à faibles gradients de propriétés physiques variables. La viscosité dynamique et la conductivité thermique ont été supposées fonction linéaire de la température.

Après avoir explicité les variations relatives des profils de vitesses et de températures résultant de l'existence des propriétés physiques variables, on a précisé l'exacte dépendance des variations du frottement pariétal et du flux thermique en fonction du nombre de Prandtl et on a donné la contribution de chaque gradient de propriété physique.

On a montré ensuite les possibilités d'utilisation des résultats théoriques par une application effectuée dans le cas du tube.

Les résultats théoriques obtenus ont été comparés avec ceux d'autres auteurs et vérifiés expérimentalement pour un écoulement d'eau dans un tube.

NOTATIONS

<p>μ, viscosité dynamique;</p> <p>ν, viscosité cinématique;</p> <p>ρ, masse volumique;</p> <p>C, chaleur spécifique à pression constante;</p> <p>λ, conductivité thermique;</p> <p>a, b, variations relatives respectivement de la viscosité et de la conductivité thermique par °C;</p> <p>x, abscisse longitudinale comptée à partir de la naissance de la couche limite thermique;</p> <p>y, distance à la paroi;</p> <p>η, variable de similitude sans dimension;</p> <p>u, v, composantes de la vitesse au point de coordonnées x, y selon les directions x et y respectivement;</p> <p>T, température au point de coordonnées x et y;</p> <p>ψ, fonction de courant;</p> <p>θ, température réduite;</p> <p>ϕ, fonction de perturbation de f;</p> <p>χ, fonction de perturbation de θ;</p> <p>τ_p, frottement à la paroi;</p> <p>K_p, pente des vitesses longitudinales à la paroi;</p> <p>$Q(x)$, densité de flux thermique à l'abscisse x;</p> <p>$\bar{Q}(x)$, flux thermique produit par le tube jusqu'à l'abscisse x;</p> <p>U_q, vitesse moyenne;</p> <p>q_v, débit volume;</p> <p>D, diamètre du tube, R rayon;</p>	<p>L, longueur de la partie du tube chauffée;</p> <p>$e(x)$, épaisseur locale de déplacement;</p> <p>X_{12}, longueur caractéristique;</p> <p>Pr, = $\mu C/\lambda$, nombre de Prandtl;</p> <p>R, = $U_q D/\nu$, nombre de Reynolds;</p> <p>$Nu(x)$, = $xQ(x)/\lambda(T_p - T_\infty)$, nombre de Nusselt local;</p> <p>Grz, = $\frac{D}{X_{12}} Pr R$, nombre de Graetz;</p> <p>$\gamma\delta^x(q)$, = $\int_0^{X_p = p \frac{\eta^2}{9}} e^{-t} t^{q-1} dt$,</p> <p>fonction gamma incomplète, p, q nombres entiers ou fractionnaires positifs.</p> <p style="text-align: center;">Signification des indices de grandeurs physiques</p> <p>$*$, sans dimension;</p> <p>∞, repérées en dehors de la couche limite thermique;</p> <p>0, repérées en l'absence de propriétés physiques variables;</p> <p>c, repérées en tenant compte de l'influence des propriétés physiques variables;</p> <p>p, prises à la paroi;</p> <p>a ou b, en indice représentent la valeur de la variable résultant du gradient de viscosité a ou du gradient de conductivité thermique b.</p>
---	---

1. INTRODUCTION

LA RESOLUTION des équations des couches limites dynamiques et thermiques en tenant compte de l'influence des variations des propriétés physiques est considérablement simplifiée pour des écoulements incompressibles par l'existence de solutions semblables.

Ainsi, plusieurs auteurs, Schuh [1], Peube [2], Seban [3], pour la plaque plane sans gradient de pression, puis Poots et Ragget [4, 5] purent résoudre le système complet des équations des couches limites avec propriétés physiques variables en exprimant numériquement leurs solutions.

Cependant, il n'existe pas de résolution, même particulière, sous la forme de solutions explicites décrivant les phénomènes.

Dans cette étude, on résout, pour un écoulement laminaire incompressible, le système des équations décrivant le phénomène de convection forcée en supposant la viscosité dynamique et la conductivité thermique fonction de la température. On s'est placé dans le cas élémentaire d'un écoulement initial de Couette sans gradient de pression et on a explicité à l'aide des fonctions gamma incomplètes les solutions exactes trouvées. Puis, on a appliqué les résultats théoriques obtenus au cas du tube et on a effectué une vérification expérimentale.

2. FORMES DES SOLUTIONS SEMBLABLES DES COUCHES LIMITES

Lorsque les propriétés physiques sont variables, les équations des couches limites dynamiques et thermique à résoudre en écoulement permanent incompressible et laminaire, sans gradient de pression sont données par :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{PC} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

auxquelles il faut ajouter les relations exprimant la dépendance des propriétés physiques avec la température :

$$\nu = \nu(T), \quad \lambda = \lambda(T).$$

Lorsque les propriétés physiques sont constantes [2], les équations (1) et (2) possèdent des solutions semblables de la forme :

$$\psi = Av_\infty x^{n+1} f_1(\eta), \quad A \text{ constante} \quad (3)$$

$$\theta = x^m f_2(\eta) \quad (4)$$

n, m nombres entiers ou fractionnaires avec :

$$\eta = Ayx^n \quad (5)$$

ψ est la fonction de courant définie par Blasius par :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6)$$

et f_1 et f_2 des fonctions de la seule variable η .

Avec les propriétés physiques variables, on montre [2] que les équations (3) et (4) ne peuvent être conservées que si les dérivées par rapport à θ des propriétés physiques variables ne dépendent que de η . On pose donc :

$$\psi = Av_\infty x^{n+1} f(\eta) \quad (7)$$

$$\theta = \theta(\eta) \quad (8)$$

avec

$$A = \sqrt[3]{(K_0/\nu_0)}$$

où K_0 est la pente à la paroi des vitesses longitudinales lorsque les propriétés physiques sont supposées constantes.

3. SOLUTIONS EXPLICITES DANS LE CAS D'UN ECOULEMENT DE COUETTE SANS GRADIENT DE PRESSION

En introduisant (7) et (8), les équations (1) et (2) deviennent pour $n = -1/3$ (cas de l'écoulement de Couette) :

$$\frac{1}{3} f f'' - \frac{2}{3} f f''' = \nu_* f''' + \frac{\partial \nu_*}{\partial \theta} \theta' f'' \quad (9)$$

$$-\frac{2}{3} C_* f \theta' = \frac{1}{Pr_\infty} \left[\lambda_\infty \theta'' + \frac{\partial \lambda_*}{\partial \theta} \theta'^2 \right] \quad (10)$$

Nous résoudrons le système des équations (9) et (10) dans le cas des petits écarts de température. Soient ϕ et χ les perturbations des fonctions f et g :

$$f = f_0 + \phi \quad (11)$$

$$\theta = \theta_0 + \chi \quad (12)$$

où f_0 et θ_0 , solutions du système (9), (10) avec propriétés physiques constantes sont données par :

$$f_0 = \frac{\eta^2}{2}, \quad \theta_0 = \frac{\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

où $\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})$ est une fonction gamma incomplète définie en nomenclature et $\Gamma(\frac{1}{3})$ une fonction gamma complète.

Par ailleurs, on admettra que la viscosité et la conductivité varient linéairement avec la température :

$$\mu = \mu_\infty(1 + a\theta) \quad (13)$$

$$\lambda = \lambda_\infty(1 + b\theta) \quad (14)$$

En ne conservant que les termes du premier ordre, on obtient le système (6):

$$\phi''' + \frac{1}{3}\eta^2\phi'' - \frac{2}{3}\eta\phi' + \frac{2}{3}\phi = -aK_3 e^{-\frac{Pr}{9}\eta^3} \quad (15)$$

$$\chi'' + \frac{1}{3}Pr\eta^2\chi' = -\frac{2}{3}Pr\theta_0\phi - b(\theta_0\theta'_0 + \theta_0'^2) \quad (16)$$

où

$$K_3 = -\frac{3^{1/3}Pr^{1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \quad (17)$$

auquel on associe les conditions aux limites:

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad \phi(0) = \phi'(0) = 0, \quad \chi(0) = 0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad \phi''(\infty) = 0, \quad \chi(\infty) = 0. \end{aligned}$$

La connaissance de la solution générale de l'équation (15) sans second membre permet [7], par la méthode de variation des constantes de résoudre complètement le système (15), (16). Les calculs, assez longs donnent les résultats suivants:

$$\frac{u-u_0}{u_0} = \frac{\phi'}{\eta} \quad (18)$$

$$\left(\frac{Kx^2}{v_0}\right)^{1/3} \frac{v-v_0}{u_0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\phi}{\eta} - \phi' \right] \quad (19)$$

où

$$\begin{aligned} \phi = \frac{aK_3}{Pr-1} \left\{ \frac{3}{2} \left[e^{-\frac{Pr}{3}\eta^3} - e^{-\frac{\eta^3}{9}} \right] \right. \\ \left. + 3^{1/3}\eta \left[Pr^{1/3}\gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3}) - \gamma_0^1(\frac{2}{3}) \right] \right. \\ \left. + \frac{\eta^2}{2 \cdot 3^{1/3}} \left[\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) - \Gamma(\frac{1}{3}) + Pr^{2/3} \left[\Gamma(\frac{1}{3}) - \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \right] \right] \right\} \\ \phi' = \frac{aK_3}{Pr-1} \left\{ -3^{1/3}\gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3}) + 3^{1/3}\gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3})Pr^{1/3} + 3^{-1/3}\eta \right. \\ \left. \left[\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) - \Gamma(\frac{1}{3}) + Pr^{2/3} \left[\Gamma(\frac{1}{3}) - \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \right] \right] \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

où les fonctions $\gamma_0^{Pr}(q)$ représentent les fonctions gamma incomplètes définies dans la nomenclature.

La variation relative $u-u_0/u_0$ des composantes de la vitesse (Figs. 1 et 2) représente en réalité l'erreur résultante entre le calcul effectué en considérant les propriétés physiques constantes exprimées à l'infini et le calcul effectué avec les propriétés physiques variables.

On obtient pour les variations relatives de la pente de vitesse:

$$\frac{K_{pe} - K_0}{K_0} = -\frac{Pr^{2/3} + Pr^{1/3}}{Pr^{2/3} + Pr^{1/3} + 1} a. \quad (21)$$

Pour les variations relatives du frottement à la paroi:

$$\frac{\tau_{pe} - \tau_{p0}}{\tau_{p0}} = \frac{a}{Pr^{2/3} + Pr^{1/3} + 1} \quad (22)$$

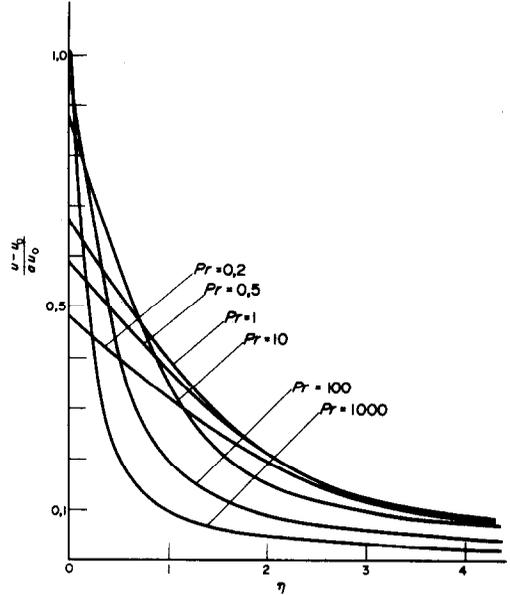


FIG. 1. Variations relatives des vitesses longitudinales.

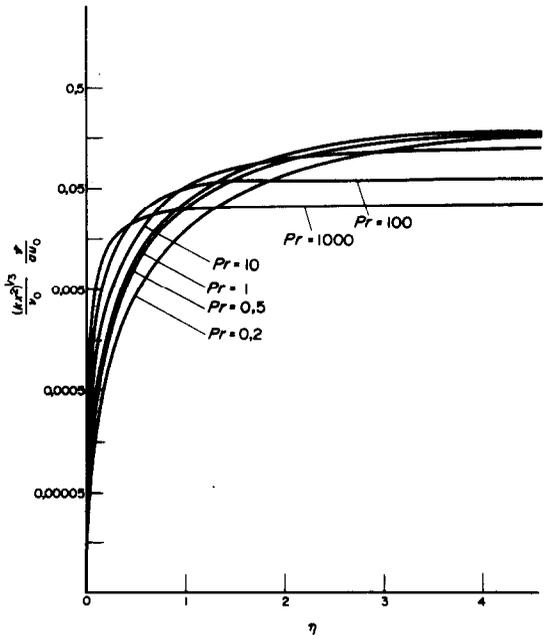


FIG. 2. Modifications relatives des profils de vitesses transversaux.

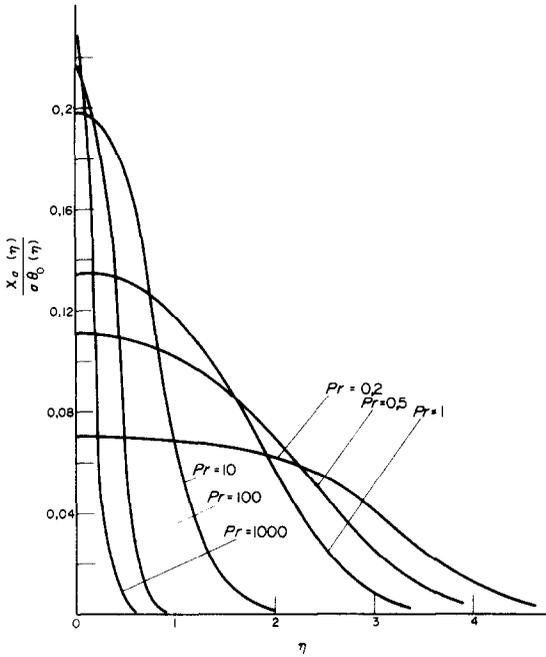


FIG. 3. Variations relatives des profils de températures.

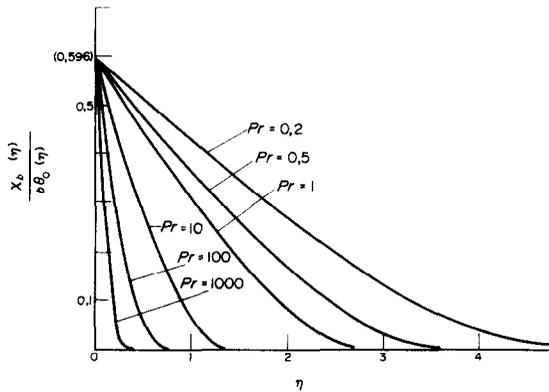


FIG. 4. Influence du gradient de conductivité thermique sur la répartition du profil de température.

et, pour les variations relatives de températures (Figs. 3 et 4):

$$\frac{\chi_a}{a\theta_0} = \frac{2Pr^{5/3}}{3^{1/3}\Gamma^2(\frac{1}{3})} \left[\frac{F(Pr, \eta)}{\theta_0} - F(Pr, \infty) \right] \quad (23)$$

où

$$F(Pr, \eta) = \frac{1}{Pr-1} \left\{ \frac{1-Pr}{2Pr} I_3(1, Pr, \eta) + \left[\frac{[\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})]^2}{2 \cdot 3^{2/3}} + 2^{1/3} \cdot 3^{1/3} \gamma_0^{2Pr}(\frac{2}{3}) \right] \right.$$

$$\left. \frac{3^{4/3} e^{-\frac{Pr}{9}\eta^3}}{2} \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3}) - \frac{3^{1/3} \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3})}{2} + \frac{3^{1/3} \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{3})}{2} \right] \frac{1}{Pr^{2/3}} + \left[\frac{3^{1/3} \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3})}{2} - \frac{\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3})}{2 \cdot 3^{2/3}} - \frac{3^{1/3} \Gamma(\frac{1}{3}) \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3})}{2} \right] \frac{1}{Pr^{4/3}} + \frac{3^{4/3} e^{-\frac{Pr}{9}\eta^3}}{2Pr} \gamma_0^{Pr}(\frac{2}{3}) - 3^{1/3} \gamma_0^{Pr+1}(\frac{2}{3}) \frac{(Pr+1)^{1/3}}{Pr} \left. \right\}$$

$$\frac{\chi_b}{b\theta_0} = \gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3}) \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})} - 1 \right) - \frac{2^{1/3}}{\Gamma^2(\frac{1}{3})} \left[\gamma_0^{2Pr}(\frac{2}{3}) \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})} - \Gamma(\frac{2}{3}) \right] - \frac{5}{6} \left[1 - \frac{\gamma_0^{Pr}(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} \right]. \quad (24)$$

La densité de flux thermique locale est alors:

$$Q(x) = -\lambda_0(1+b)(T_p - T_\infty) \left(\frac{K_0}{v_0} \right)^{1/3} x^{-1/3} (\chi'_p + \theta'_p) \quad (25)$$

et, en négligeant les termes de second ordre, on déduit:

$$\frac{Q(x) - Q_0(x)}{Q_0(x)} = 1,596b - \left(\frac{Nu_c - Nu_0}{Nu_0} \right)_a \quad (26)$$

où

$$\left(\frac{Nu_c - Nu_0}{Nu_0} \right)_a = \frac{2Pr^{5/3} F(Pr, \infty)}{3^{1/3} \Gamma^2(\frac{1}{3})} a \quad (27)$$

représente la variation relative du nombre de Nusselt résultant du gradient de viscosité.

On constate que la variation relative du flux thermique due à l'existence du gradient de conduction thermique est indépendante du nombre de Prandtl.

On peut le montrer directement en effectuant le changement de variable $\xi = Pr^{1/3} \eta$ [13].

Sur la Fig. 5, on a représenté la variation

$$\left(\frac{Nu_c - Nu_0}{Nu_0} \right)_a = \frac{[Nu]_a}{aNu_0}$$

en fonction du nombre de Prandtl et on a mis en évidence une limite asymptotique pour $Pr \rightarrow \infty$ égale à 0,25.

Les résultats que nous avons obtenus, respectivement, pour les variations relatives du nombre de Nusselt, et pour les variations relatives du frottement pariétal ont été comparés aux résultats obtenus par Peube [2] et par Seban [3] (Figs. 6 et 7). Comme on devait s'y attendre, étant donné le procédé de calcul employé, on constate que lorsque les écarts de température deviennent faibles ($v_p/v_\infty \rightarrow 1$), les résultats obtenus dans notre étude se superposent aux résultats obtenus par ces auteurs.

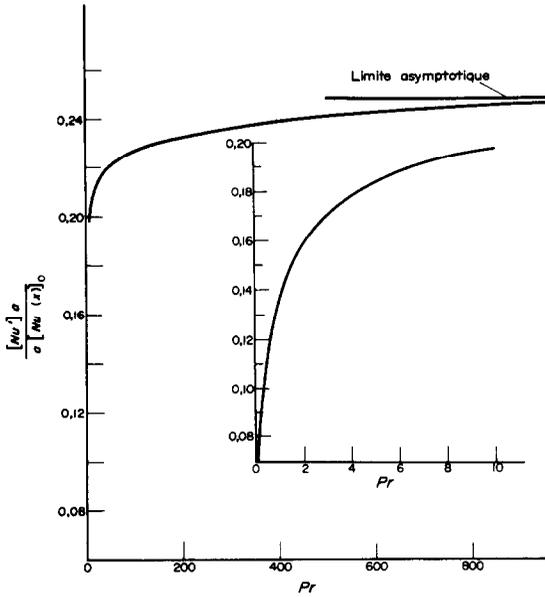


FIG. 5. Influence du gradient de viscosité sur la variation relative du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Prandtl.

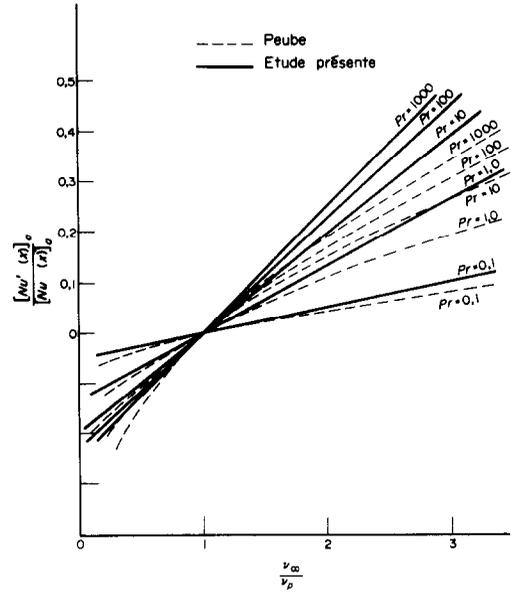


FIG. 7. Comparaison avec les résultats obtenus par Peube dans le cas de la plaque plane.

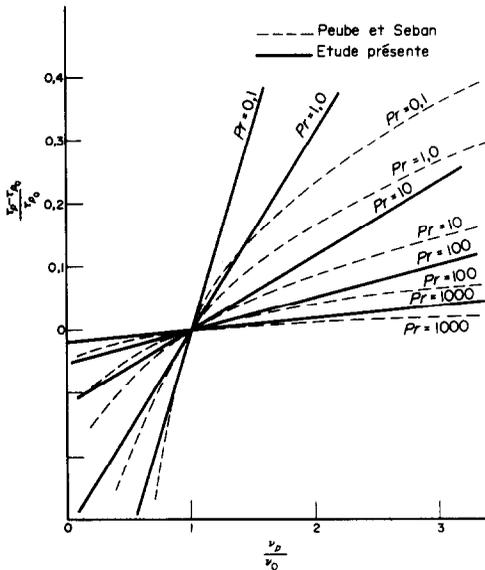


FIG. 6. Comparaison avec les résultats obtenus par d'autres auteurs, dans le cas de la plaque plane.

On suppose donc :

- (a) Que la couche limite thermique est superposée à un écoulement initial assimilable à un écoulement de Couette sans gradient de pression, ce qui amène à se placer au début de la longueur de développement de la couche limite thermique, et, dans la zone de l'écoulement dynamique établi, suffisamment près de la paroi.
- (b) Que les écarts de température sont faibles.

4.2. Expressions des variations relatives de frottement et de flux thermique

En introduisant une épaisseur de déplacement locale $e(x)$ résultant de l'existence de propriétés physiques variables et en supposant le débit du fluide avec les propriétés physiques variables égal au débit avec les propriétés physiques constantes, le calcul des variations relatives locales de frottement donne [13]:

$$\frac{\tau_{pe} - \tau_{p0}}{\tau_{p0}} = \frac{a}{Pr^{2/3} + Pr^{1/3} + 1} + \frac{3e(x)}{R}$$

Afin d'évaluer l'importance globale de l'effet des gradients de propriétés physiques, on a introduit la valeur moyenne $\bar{e}(x_1, x_2)$ de l'épaisseur de déplacement correspondant à une distance $x_2 - x_1 = L$ où x_2 et x_1 sont deux abscisses prises le long du tube et on a calculé l'expression de la variation relative globale du

4. APPLICATION THEORIQUE AU TUBE

4.1. Les hypothèses

Les résultats obtenus dans le cas de l'écoulement de Couette peuvent être appliqués à un écoulement dans un tube sous réserve de respecter les hypothèses des calculs théoriques.

frottement correspondante. On a trouvé [13]:

$$\frac{\bar{\tau}_{p_c} - \tau_{p_0}}{\tau_{p_0}} = \frac{1}{Pr^{2/3} + Pr^{1/3} + 1} \left[1 + 2,35 \left(\frac{X_{12} Pr}{D R} \right)^{1/3} \right] \quad (28)$$

où

$$X_{12}^{1/3} = \frac{x_2^{4/3} - x_1^{4/3}}{x_2 - x_1}$$

Le calcul des variations relatives du flux thermique donne, avec les mêmes hypothèses que pour les variations relatives de frottement:

$$\frac{Q(x) - Q_0(x)}{Q_0(x)} = b - \frac{e(x)}{R} + \frac{\chi'_p}{\theta'_{0_p}} \quad (29)$$

En calculant les quantités de chaleur nécessaires pour maintenir le température de paroi constante sur une longueur L de tube, on trouve [13]:

$$\frac{Q(L) - Q_0(L)}{Q_0(L)} = 1,596b - a \left[\left(\frac{Nu_c - Nu_0}{Nu_0} \right)_a - \frac{0,78 Pr^{2/3} Gtz^{-1/3}}{Pr^{2/3} + Pr^{1/3} + 1} \right] \quad (30)$$

où

$$\left(\frac{Nu_c - Nu_0}{a Nu_0} \right)_a$$

est représenté sur la Fig. 5.

Dans le cas de l'eau et pour le tube de rayon égal à 0,3 cm utilisé pour la vérification expérimentale, le rapport $\frac{Q(L) - Q_0(L)}{Q_0(L)}$ correspondant à un écart $T_p - T_\infty = 10^\circ\text{C}$ est compris entre 2 pour cent (à 100°C) et 10 pour cent (à 0°C).

4.3. Les résultats d'autres auteurs

Plusieurs auteurs [9-11] ont étudié l'influence de gradients de propriétés physiques variables dans le cas du tube. Mais, les résultats obtenus, souvent très simplifiés, sont indépendants du nombre de Prandtl. De plus, aucun auteur ne décrit l'influence du gradient de conductivité thermique.

Yang [11] a étudié l'effet de la viscosité variable dans le cas d'un tube pour les valeurs de a comprises entre $-0,1$ et 10 en négligeant les variations des termes de quantité de mouvement, ce qui ne peut se concevoir qu'aux grands nombres de Prandtl.

Sur les Figs. 8 et 9, on a représenté respectivement les variations relatives de frottement pariétal (Fig. 8) et les variations relatives de flux thermique (Fig. 9) déduites des résultats de l'étude de Yang et des relations (27) et (30).

On constate bien, comme on pouvait s'y attendre, une superposition des résultats obtenus dès que a tend vers zéro.

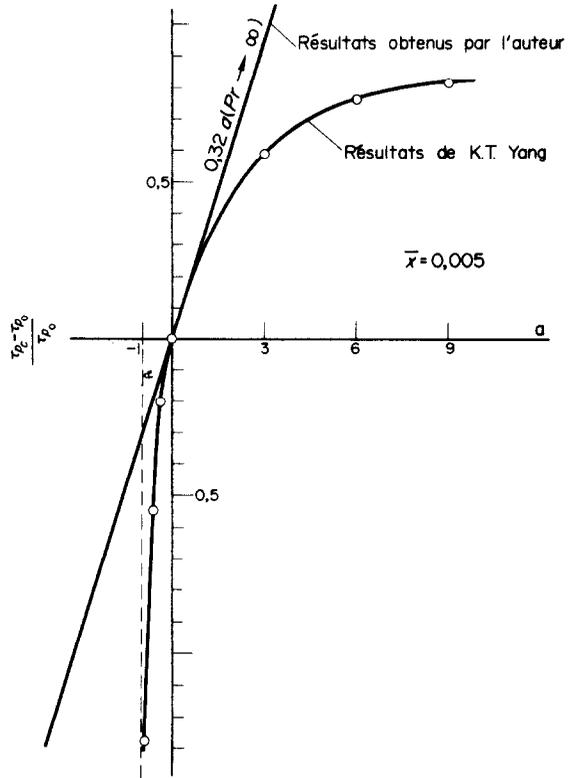


FIG. 8. Comparaison avec les résultats de Yang dans le cas de la variation relative de frottement.

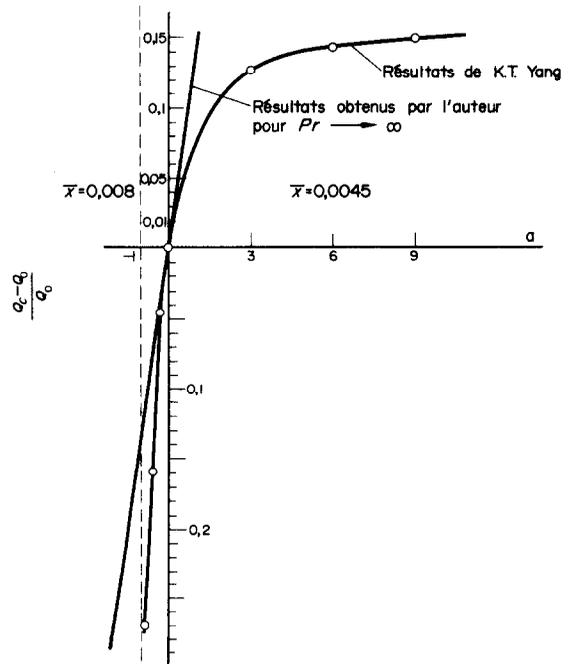


FIG. 9. Comparaison avec les résultats de Yang dans le cas de la variation relative du flux thermique.

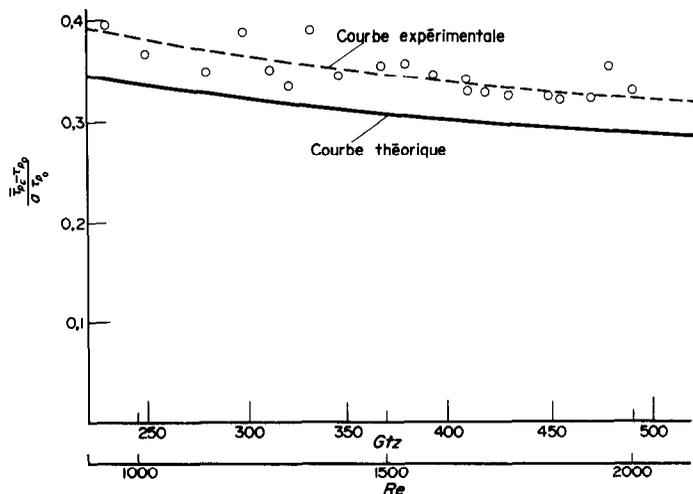


FIG. 10. Variations relatives moyennes de frottement pariétal par unité de gradient de viscosité dans un tube. Cas de l'eau.

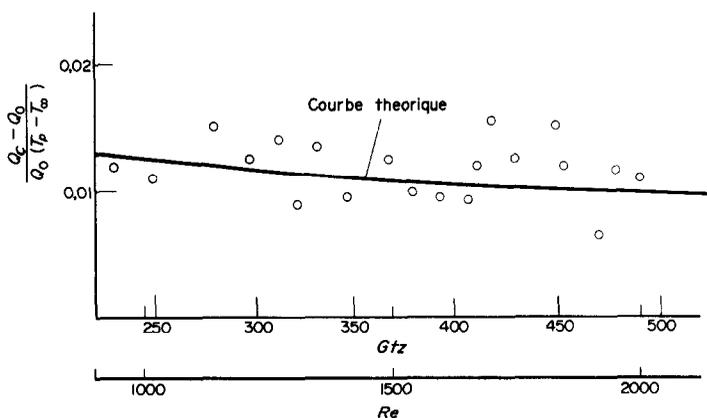


FIG. 11. Variation relative de flux thermique par degré dans un tube. Cas de l'eau.

5. VERIFICATION EXPERIMENTALE

Afin de vérifier les résultats théoriques appliqués au tube, on a effectué la mesure des variations relatives de flux thermique et de frottement à la paroi dans le cas d'un tube chauffé à température de paroi constante et traversé par un écoulement laminaire établi d'eau. Cette vérification a nécessité le respect des hypothèses théoriques énoncées [13].

Le tube était parcouru dans son épaisseur par une rigole hélicoïdale destinée à loger des résistances chauffantes.

Des thermocouples étaient répartis le long du tube afin de pouvoir contrôler les températures au niveau de chacune des résistances chauffantes, et imposer, à l'aide des résistances, une température à la surface intérieure du tube sensiblement constante.

Des prises de pression p_1 et p_2 avaient été aménagées dans la paroi du tube afin de déduire, à partir du gradient de pression longitudinal, la valeur du frottement à la paroi par la relation

$$\tau_p = \frac{R}{2} \frac{p_2 - p_1}{x_2 - x_1}$$

On pouvait mesurer les températures de l'écoulement à l'aval T_m et à l'amont T_∞ afin de déduire les valeurs des flux thermiques par la relation:

$$Q(L) = \rho c q_v (T_m - T_\infty) \tag{31}$$

On a effectué 20 séries de mesure à débit constant et pour un nombre de Prandtl voisin de 13.

Les résultats expérimentaux obtenus en ce qui concerne les variations relatives de frottement pariétal

(Fig. 10) sont en accord avec les résultats indiqués par la courbe théorique (27) bien que se situant légèrement au dessus. Cet écart provient du fait que l'on a négligé dans l'étude théorique les contributions de 2^{ème} ordre.

Pour les résultats expérimentaux des variations relatives de flux thermique (Fig. 11), on observe un chevauchement des résultats expérimentaux et de la courbe théorique définie par l'équation (30). Toutefois, les points de mesure se répartissent à raison de 2/3 de leur nombre au-dessus de la courbe théorique et pour 1/3 au-dessous de la courbe, mettant en évidence une position de la courbe expérimentale légèrement au-dessus de la courbe théorique comme dans le cas des variations relatives de frottement et pour les mêmes raisons.

6. CONCLUSION

Les solutions explicites trouvées dans cette étude permettent de connaître les lois de répartition des vitesses et des températures des couches limites dynamiques et thermiques incompressibles laminaires, compte tenu de l'existence de toutes les propriétés physiques variables, dans le cas élémentaire d'une répartition linéaire des vitesses initiales.

On a pu préciser, en particulier, la dépendance des variations du frottement pariétal et du flux thermique en fonction du nombre de Prandtl et donner les contributions de chaque propriété physique variable.

On a ainsi constaté que si le frottement pariétal était affecté seulement par l'existence du gradient de viscosité, la contribution du gradient de conduction thermique étant de second ordre, il n'en est pas de même en ce qui concerne le flux thermique, la contribution du gradient de conductivité thermique ne pouvant pas être négligée.

La concordance des résultats obtenus avec ceux d'autres auteurs a mis en évidence la validité des solutions trouvées. L'application expérimentale a permis une vérification dans le cas du tube.

Comme le montre l'application effectuée dans le cas du tube, l'hypothèse de linéarité de la répartition des vitesses initiales, bien que restrictive, peut contribuer

à l'étude d'un grand nombre d'écoulements et de problèmes, à condition de se placer suffisamment près de la paroi.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Schuh, The solution of the laminar boundary layer equation for the flat plate for velocity and temperature fields for variable physical properties and for the diffusion field at high concentration, NACA. T.M. 1275 (1950).
2. J.-L. Peube, Sur les solutions semblables des équations de la couche limite laminaire bidimensionnelle à masse volumique constante et propriétés physiques variables. Application à la plaque plane sans gradient de pression. In *Applied Mechanics*, Görtler. Springer, Berlin (1964).
3. R. A. Seban, The laminar boundary layer of a liquid with variable viscosity, in *Boelter Anniversary Volume. Heat Transfer Thermodynamics and Education*. McGraw-Hill, New York (1964).
4. G. Poots et G. F. Ragget, Theoretical results for variable property laminar boundary layers in water, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 597-610 (1967).
5. G. Poots et G. F. Ragget, Theoretical results for variable property laminar boundary layers in water with adverse pressure gradients, *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, 1513 (1968).
6. J. Charraudeau, Influence d'un faible gradient de viscosité sur une couche limite laminaire incompressible, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **268**, 819-822 (1969).
7. J. Charraudeau, Sur l'importance des variations des propriétés physiques dans une couche limite laminaire incompressible. *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **270**, 1618-1621 (1970).
8. Brun et Martinot-Lagarde, *Mécanique des Fluides*. Dunod, Paris (1960).
9. Sieder et Tate, Heat transfer and pressure drop of liquid in tubes, *Ind. Engng Chem.* **28**(12), (1936).
10. Test, Laminar flow heat transfer and fluid flow for liquids with temperature dependent viscosity, *J. Heat Transfer* **385** (1968).
11. K. T. Yang, Laminar free convection of liquids in tubes with variable viscosity, *J. Heat Transfer* **11** (1962).
12. J.-L. Peube, Influence de la courbure sur l'établissement de la couche limite de diffusion en écoulement laminaire établi dans un tube, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci. Paris* **257**, 2071-2074 (1962).
13. J. Charraudeau, Contribution à l'étude de couches limites à propriétés physiques variables, Thèse de doctorat d'état, L.E.A.T. Fac. des Sciences, Poitiers 86000 (1974).

INFLUENCE OF PHYSICAL PROPERTIES OF GRADIENTS IN FORCED CONVECTION—APPLICATION IN THE CASE OF THE TUBE

Abstract—The equations of thermal and dynamic boundary layers have been solved in the case of an incompressible flow with linear distribution, for initial speeds and low gradients of variable physical properties. The dynamic viscosity and thermal conductivity are assumed to be a linear function of temperature.

After having expressed the relative variations of speed and temperature profiles resulting from variable physical properties, the exact dependence of wall friction and thermal flow on Prandtl number has been evaluated and the contribution of every physical property gradient has been given.

The possibilities of using the theoretical results in the practice have been shown in the case of the tube. The obtained thermal results have been compared with other results in the literature and experimental data for water flow in a tube.

**DER EINFLUß VON GRADIENTEN DER STOFFEIGENSCHAFTEN
BEI ERZWUNGENER KONVEKTION—ANWENDUNG BEIM ROHR**

Zusammenfassung—Die Gleichungen der Strömungs- und Temperaturgrenzschichten werden für den Fall inkompressibler Strömung mit linearer Anfangsgeschwindigkeitsverteilung und kleinen Gradienten der variablen Stoffeigenschaften gelöst. Die dynamische Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit wurden als lineare Temperaturfunktion berücksichtigt. Mit der Angabe der von den variablen Stoffeigenschaften herrührenden relativen Änderungen der Geschwindigkeits- und Temperaturprofile wurde die genaue Abhängigkeit der Änderung der Wandreibung und des Wärmestroms von der Prandtl-Zahl festgelegt und die Verteilung eines jeden Gradienten der Stoffeigenschaft ausgedrückt. Sodann wurden die Anwendungsmöglichkeiten der theoretischen Ergebnisse im Fall eines Rohres gezeigt.

Die erzielten Ergebnisse wurden mit denen anderer Autoren verglichen und experimentell für eine Wasserströmung im Rohr nachgeprüft.

**ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ
КОНВЕКЦИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТРУБАМ**

Аннотация — Решена система уравнений для динамического и теплового пограничных слоев в случае течения несжимаемой жидкости с линейным распределением начальных скоростей и небольшими изменениями физических свойств. Предполагается, что динамическая вязкость и теплопроводность являются линейными функциями температуры.

Из относительных изменений профилей скорости и температуры, обусловленных переменными физическими свойствами, выявлено влияние каждого из них и установлена точная зависимость величины трения на стенке и теплового потока от числа Прандтля.

Далее указаны возможности использования теоретических результатов применительно к течениям в трубе.

Полученные результаты для теплового потока сравниваются с данными других авторов и экспериментально проверены на примере течения воды в трубе.